

## ПРИМЕНЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Математические методы являются важнейшим инструментом анализа экономических явлений и процессов, построения теоретических моделей, позволяющих отобразить существующие связи в экономической жизни, прогнозировать поведение экономических субъектов и экономическую динамику. Математическое моделирование становится языком современной экономической теории, одинаково понятным для учёных всех стран мира.

В свою очередь, математическая модель — это приближенное описание какого-либо явления или объекта реального мира на языке математики. Основная цель моделирования — исследовать эти объекты и предсказать результаты будущих наблюдений, но это еще и метод познания окружающего мира, дающий возможность управлять им. Следовательно, экономический процесс будет описан с помощью математического языка.

- Начнем исследование в экономике с применения линейной алгебры. Наиболее точно данная тема развернута в теоретической модели Василия Леонтьева. Это один из выдающихся экономистов, разработчик системы межотраслевых балансов «затраты – выпуск», используемых в практике моделирования национальной и мировой экономик. Родился в Петербурге, учился в Петроградском университете, работал в Китае, Германии. Теоретическая модель «затраты – выпуск» послужила основой для построения многоотраслевой модели экономики США.

Разработка динамических моделей межотраслевого баланса использовалась для анализа последствий различных вариантов экономической политики. Правительство Рузвельта привлекло В. Леонтьева к разработке системы балансовых взаимосвязей, что, в частности, позволило достаточно четко регулировать массовое производство вооружений в годы Второй мировой войны.

Межотраслевой баланс (МОБ, метод «затраты-выпуск») — экономико-математическая балансовая модель, характеризующая межотраслевые производственные взаимосвязи в экономике страны. Характеризует связи между выпуском продукции в одной отрасли и затратами, расходом продукции всех участвующих отраслей, необходимым для обеспечения этого выпуска. Межотраслевой баланс составляется в денежной и натуральной формах.

Межотраслевой баланс представлен в виде системы линейных уравнений. Он представляет собой таблицу, в которой отражен процесс формирования и использования совокупного общественного продукта в отраслевом разрезе. Таблица показывает структуру затрат на производство каждого продукта и структуру его распределения в экономике. По столбцам отражается стоимостный состав выпуска, по строкам отражаются направления использования ресурсов каждой отрасли.

**В качестве примера на экономической почве рассмотрим задачу:**

*Пусть экономика страны насчитывает  $n$  отраслей промышленности, каждая из которых производит свою продукцию. Часть продукции идёт на внутрипроизводственное потребление данной отраслью и другими отраслями, а другая часть предназначена для целей конечного (вне сферы материального производства) личного и общественного потребления.*

Рассмотрим процесс производства за некоторый период времени (например, год). Введём следующие обозначения:

$x_i$  общий (валовой) объём продукции  $i$ -й отрасли;

$a_{ij}$  коэффициенты прямых затрат, показывающие затраты продукции

$i$ -й отрасли на производство единицы продукции  $j$ -й отрасли;

$y_i$  объём конечного продукта  $i$ -й отрасли для непроеизводственного потребления.

Так как валовой объём продукции  $i$ -й отрасли равен суммарному объёму её продукции, потребляемой всеми отраслями, и конечного продукта, то

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} * x_j + y_i, (i=1,2,...,n)$$

Это уравнение называется соотношениями баланса и задают модель многоотраслевой экономики.

Основная задача межотраслевого баланса состоит в отыскании такого валового объёма продукции для каждой из отраслей, который при известных прямых затратах обеспечивает заданный конечный продукт. Для её решения достаточно решить систему линейных алгебраических уравнений.

- Аналитическая геометрия довольно распространена при решении и визуализации экономических задач на производстве.

Математическое моделирование экономических процессов – это система математических выражений, включающая переменные величины и параметры. Параметры – это количественные связи между экономическими величинами, а переменные – это значения, которых должны быть найдены в результате анализа системы уравнений. Система уравнений образует математическую модель экономического процесса. Такие модели делятся на статические и динамические. В статических моделях все экономические показатели привязываются к определенному моменту времени и не рассматривается связь между показателями разных периодов развития экономического объекта. В динамических моделях развитие экономического процесса рассматривается во времени и определяется временная взаимосвязь экономических показателей. Математическое решение задачи оптимального функционирования экономического объекта означает нахождение критерия оптимальности деятельности экономического объекта.

Рассмотрим пример, показывающий, как вычислить наиболее экономичное расстояние для перевозок.

*Издержки перевозки двумя транспортными средствами выражаются функциями  $y = 20x + 100$  и  $y = 25x + 70$ , где  $x$  — это дальность перевозки в сотнях километров, а  $y$  — транспортные расходы в денежных единицах. Определить, начиная с какого расстояния более экономичным становится первое транспортное средство.*

Для нахождения требуемого расстояния приравняем транспортные расходы:

$$20x + 100 = 25x + 70, 5x = 30, x = 6.$$

Итак, при перевозке на  $x=6$  сотен километров транспортные расходы

совпадают и составляют  $y = 20 \cdot 6 + 100 = 220$  денежных единиц. Поэтому, начиная с 600 км, более экономичным становится первый вид транспорта. Это видно на рисунке 1.

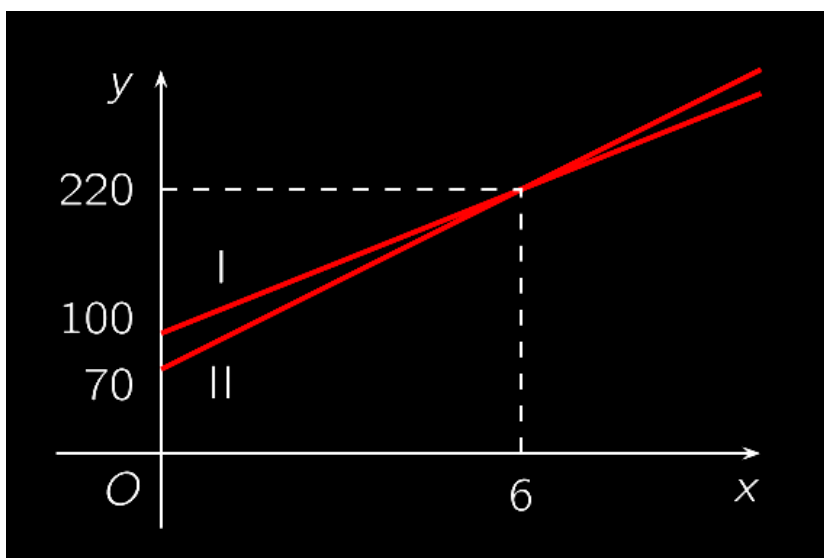


Рисунок 1

Рассмотрим вторую задачу, чтобы выяснить разницу между выручкой и издержками. Точка безубыточности — это такой объём производства, начиная с которого выручка покрывает издержки.

Мебельная фабрика продаёт каждый изготовленный стул по 64 тыс. руб. При этом издержки составляют 635 тыс. руб. за 8 стульев и 750 тыс. руб. за 13 стульев. Найти точку безубыточности, если функция издержек линейная.

Построим функцию издержек  $C(x)$  как прямую, проходящую через точки  $M_1(8, 635)$  и  $M_2(13, 750)$ .

$$\frac{C(x)-635}{750-635} = \frac{x-8}{13-8}, \quad \frac{C(x)-635}{115} = \frac{x-8}{5}, \quad \frac{C(x)-635}{23} = \frac{x-8}{1};$$

$$C(x)-635=23(x-8), \quad C(x)=23x-184+635=23x+451.$$

Функция выручки по условию имеет вид  $R(x) = 64x$ . Находим точку безубыточности как абсциссу точки пересечения линий издержек и выручки, как на рисунке 2. ( $23x+451=64x$ ,  $41x=451$ ,  $x=11$ .)

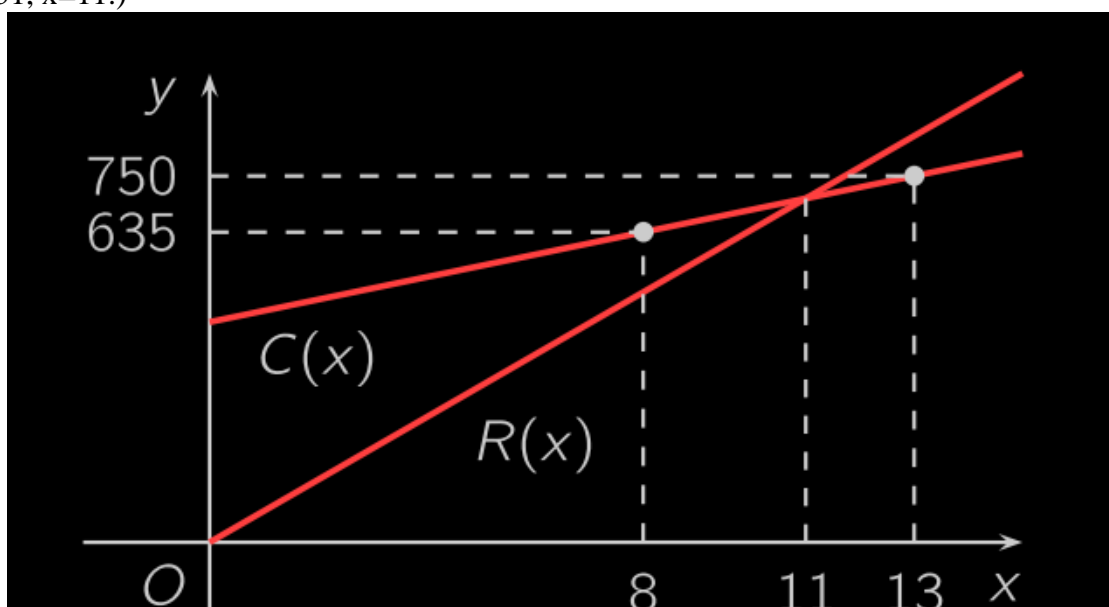


Рисунок 2

Вывод: экономико-математическое моделирование является особой наукой, предназначенной не только для экономистов и математиков. Моделирование — это, прежде всего, умение формулировать и решать проблемы, касающиеся каждого человека. Необходимо оценить роль математических методов в экономических исследованиях - они полно описывают все возможные решения и предсказывают наилучшее. Например, нахождение точки безубыточности.

Что касается модели «затраты-выпуск», она представляет собой метод систематического количественного отражения экономических связей между секторами хозяйственной системы. Ее используют для анализа как мировой, так и национальной экономики, а также для анализа хозяйства столицы или отдельного предприятия. Простая система алгебраических уравнений служит основой для государственной экономики страны.